مجموعة الأعداد العقدية

توجد مسائل لا يمكن حلها في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ فمثلاً المعادلة $x^2+1=0$ لا تحل في $\mathbb{R}$ لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه 1- .
نرمز لـ $i=\sqrt{-1}$ عندئذ يمكننا التعبير عن حل المعادلة بالشكل $x=\mp i$.
و هكذا ظهرت الحاجة لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة جديدة تكون كل المعادلات الجبرية قابلة للحل . تسمى بمجموعة الأعداد العقدية و نركز لها بالرمز $\mathbb{C}$.

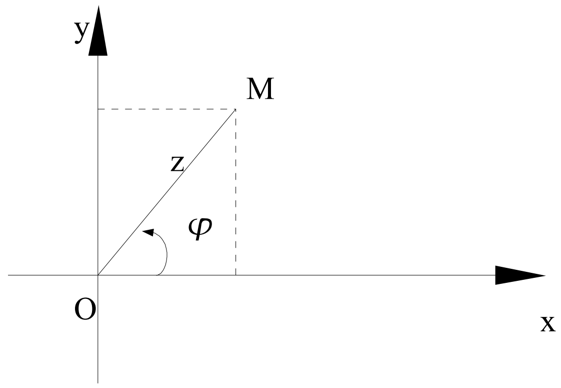
العدد العقدي :

هو العدد $z=x+iy$ ، حيث x و y أعداد حقيقية و i تخيلي يحقق $i^2=-1$.
و لما كان كل عدد حقيقي هو عدد تخيلي قسمه التخيلي معدوم فإن :

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

تمثيل العدد العقدي هندسياً:

يمثل هندسياً بنقطة على المستوي الديكارتي إحداثياها x و y و نسمي عندئذٍ المستوي الديكارتي بالمستوي العقدي و محور السينات المحور الحقيقي و محور العينات هو المحور التخيلي .



طويلة العدد العقدي :

نسمي المسافة بين النقطة $M(x,y)$ و نقطة الأصل o طويلة العدد العقدي و نرمز لها بالرمز $|z|$:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

زاوية العدد العقدي :

هي الزاوية المحصورة بين الاتجاه الموجب لـ ox و oM و تعرف بالزاوية φ

$$-\quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

العمليات على الأعداد العقدية:

الجمع :

يتم بجمع القسم الحقيقي مع القسم الحقيقي و القسم التخيلي مع القسم التخيلي :

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$$

الجداء :

$$z_1 . Z_2 = \overbrace{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}^{\text{فك الأقواس}} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

القسمة :

من الشكل : $\frac{z_1}{z_2}$ نظرب بالمرافق $\frac{z_1 \times \overline{z_1}}{z_2 \times \overline{z_1}}$ و بالتالي $z_1 \times \overline{z_1} = (x-iy)(x+iy) = x^2+y^2$:

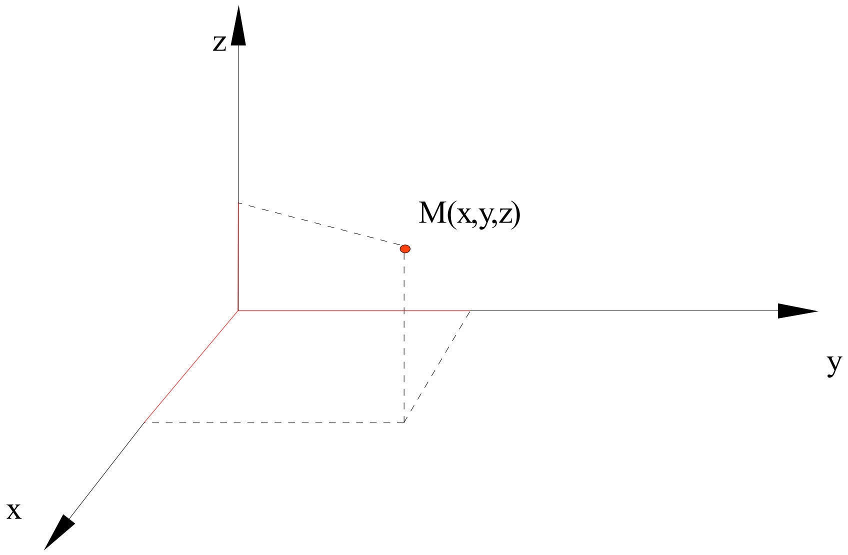
$$\frac{z_1 \times \overline{z_1}}{z_2 \times \overline{z_1}} = \frac{x^2+y^2}{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}$$ [1]

الشكل القطبي لعدد العقدي :

لا بد لنا أن نتعرف على أنواع الإحداثيات قبل الخوض في هذا التحويل :

الإحداثيات الديكارتية :

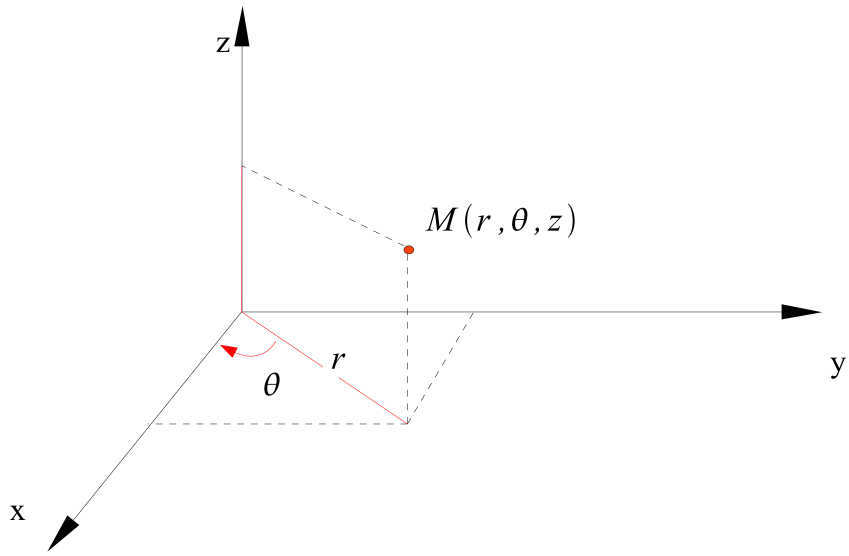
سوف نستخدمها دون البعد الثالث z



الإحداثيات الأسطوانية(القطبية) :

نستخدمها دون البعد الثالث z

1 إلى هنا ينتهي الإقتباس من كتاب التحليل 1 للدكتور معاذ عبد المجيد و الكتور عماد فتاش

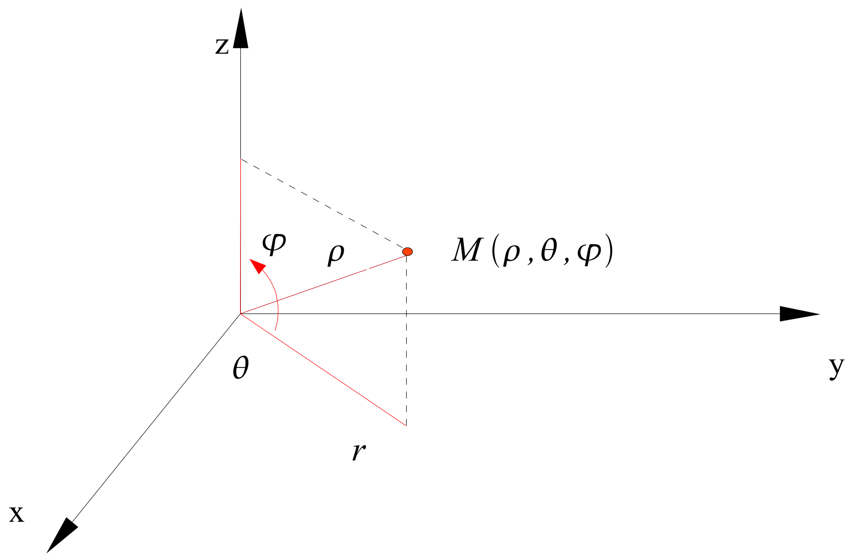


<u>**القاعدة**</u>

$$x = r \cos\theta$$
$$y = r \sin\theta$$
$$z = z$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

<u>الإحداثيات الكروية :</u>

مع أننا لن نستخدمها لكن من الأفضل التعرف عليها .



القاعدة

$$z=\rho\cos\varphi$$
$$r=\rho\sin\varphi$$
$$\theta=\theta$$
$$\rho=\sqrt{r^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$$

نعود الآن للتحويل لقطبي لعدد العقدي ، حيث نستخدم في هذا التحويل من الإحداثيات القطبية

$$x=r\ \ \cos\theta$$
$$y=r\ \ \sin\theta$$

و بالتالي :

$$z=r\ \ \cos\theta+i\,r\ \ \sin\theta$$
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

و يمكن إثبات أن:

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

و يمكن الحصول على جذور العدد العقدي و فق القانون :

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$$

و عدد الجذر هنا n جذر حيث :

$$k=0,1,2,.....,n-1$$

الشكل الأسي للعدد العقدي :

حسب علاقة أولر فإن الشكل الأسي هو :

$$z=r.e^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

و ينطبق عليه خواص التوابع الأسية مثلاً :

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\,e^{i\theta}}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}$$

استخدامات الأعداد العقدية في العلوم :

لها استخدامات عدة و خاصة في العلوم الكهربا ئية .